Devoir surveillé de Maths n°4

Exercice 1: Groupement D (2000)
Étude du résultat de la pesée d'un objet de masse m (exprimée en grammes).

On admet que la variable aléatoire X qui prend comme valeurs les résultats de la pesée d'un même objet donné suit la loi normale de moyenne $\mu = 72{,}40$ et d'écart type $\sigma = 0{,}08$.

1. Calculer la probabilité des événements suivants (les résultats seront arrondis au millième le plus proche).
   a) « $X > 72{,}45$ »;
   b) « $X < 72{,}25$ »;
   c) « $72{,}30 < X < 72{,}50$ ».

2. Déterminer le réel strictement positif h (arrondi au centième) tel que la probabilité pour que X prenne une valeur dans l'intervalle $[\ \mu - h\ ;\ \mu + h\ ]$ soit égale à 0,989.

Exercice 2:
Une urne contient six boules blanches et quatre boules noires, indiscernables au toucher. Un joueur prélève une boule, note la couleur, puis remet la boule dans l'urne.
Une « épreuve » consiste en trois tirages successifs. Pour chaque boule blanche prélevée, le joueur gagne 1 € ; pour chaque boule noire prélevée, le joueur perd 2 €. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque « épreuve », associe le gain du joueur. (Une perte est un gain négatif).

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Quelle est la loi de probabilité de X ?
3. Quelle est l'espérance mathématique de X ?

Exercice 3: Biochimiste (1992)

Partie A
La concentration x, en gramme par litre ($g \times l^{-1}$), de micro-organismes dans une culture en continu varie en fonction du temps t exprimé en heures ($t \geq 0$) et vérifie l'équation différentielle linéaire :

$$dx/dt + 0{,}70x = 2{,}35 \cdot e^{0{,}35t} \qquad (1)$$

1. Résoudre dans R^+ l'équation différentielle sans second membre associée à l'équation (1).

2. On pose $x(t) = K(t) \cdot e^{-0{,}70t}$ où K est une fonction numérique dérivable de la variable t.
   Déterminer K pour que la fonction x définie ci-dessus soit une solution de (1) dans R^+.

3. En déduire la solution générale de l'équation (1) dans R^+.

4. Donner la solution particulière de (1) correspondant à une concentration initiale de 4,70 $g \times l^{-1}$ (autrement dit : $x(0) = 4{,}70$).
Commentaire : la fonction obtenue est telle que lim $x(t) = +\infty$

En fait, il s'agit d'une solution théorique ; dans la pratique, des perturbations dues en particulier aux déchets empêchent le phénomène de se prolonger indéfiniment.

PartieB
Soit x la fonction définie sur [0 ; 6] par : $x(t) = 2{,}46 \,.\, e^{-0{,}70t} + 2{,}24 \,.\, e^{0{,}35t}$.

1. Calculer les dérivées première et seconde x' et x'' de x.

2. Démontrer que, pour tout t positif ou nul, $x''(t) > 0$.

Dans les questions suivantes, les calculs approchés seront effectués au centième près.

3. Dresser la tableau de variations de la fonction x' sur [0 ; 6].

4. a) Calculer x'(0,7) et x'(0,8) et vérifier que x'(0,7) et x'(0,8) sont de signes contraires.
b) En admettant que x'(t) = 0 admet une racine unique α dans [0 ; 6] et que 0,7 < α < 0,8, déterminer alors le signe x'(t) sur [0 ; 6] (on ne demande pas de calculer α).

5. En déduire le sens de variation de la fonction x sur [0 ; 6].

6. Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques :
2 cm sur l'axe des abscisses,
1 cm sur l'axe des ordonnées.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction x.
b) Déterminer graphiquement le temps au bout duquel la concentration est le double de la concentration initiale.

Exercice 4: Biotechnologie (1994)
La destruction des micro-organismes par la chaleur peut-être mise en évidence en chauffant à une température donnée, pendant des durées variables, une suspension de cellules bactériennes et en dénombrant les survivants.

On réalise l'expérience à 104,6°C. On relève les résultats suivants :

t_i (en minutes)	0	40	120	180	240	300
N_i	108	107	67	36	17	10

N_i est le nombre de survivants à la date t_t

1. On pose $y_i = \ln N_i / \ln 10$
Calculer les valeurs de y_i arrondies au centième le plus proche. Présenter les résultats sous forme de tableau.

2. Donner le coefficient de corrélation linéaire ; que peut-on en conclure ?

3. Utiliser les valeurs calculées au 1°) pour déterminer une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés.

4. En déduire une expression de N en fonction de t.