

Devoir surveillé de Maths n°3

Exercice 1:

Cet exercice a pour but d'étudier une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle :

$$4xy + y' = e^{-2x^2} \quad (E)$$

A. Résolution de l'équation différentielle

1. Vérifier que la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x e^{-2x^2}$ est solution de (E).
2. Déterminer la solution générale sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $4xy + y' = 0$.
3. En déduire la solution générale de l'équation (E).

B. Etude de la fonction f définie au A. 1

1. Étudier les variations de f et préciser ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; i ; j)$, (unité : 8 cm). Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0. Quelle est la position de C par rapport à T ?
3. Tracer la droite T et la courbe C .

C. Calcul d'aire

1. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe C , les axes du repère et la droite d'équation $x = a$, a étant un réel strictement positif.
2. Déterminer la limite de cette aire quand a tend vers $+\infty$.

Exercice 2:

Une société de produits pharmaceutiques fabrique en très grande quantité un type de comprimés. Un comprimé est conforme si sa masse exprimée en grammes appartient à l'intervalle $[1,2 ; 1,3]$. La probabilité qu'un comprimé soit conforme est 0,98.

On note : A l'événement : " un comprimé est conforme "

B l'événement : " un comprimé est refusé ".

On contrôle tous les comprimés. Le mécanisme de contrôle est tel que :

- Un comprimé conforme est accepté avec une probabilité de 0,98,
- Un comprimé qui n'est pas conforme est refusé avec une probabilité de 0,99,

On connaît donc : $P(A) = 0,98$; $P_{\bar{A}}(B) = 0,98$; $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,99$.

1. Déterminer $P(B/A)$ puis $P(B \cap A)$ et $P(\bar{B} \cap \bar{A})$.
2. Calculer: a) La probabilité qu'un comprimé soit refusé.
b) La probabilité qu'un comprimé soit conforme, sachant qu'il est refusé.

Exercice 3:

Une usine fabrique des tubes fluorescents. Elle a testé les durées de vie de 400 tubes fluorescents. On obtient le tableau suivant:

DUREE DE VIE (en heures)	[300, 400[[400, 500[[500, 600[[600, 700[
Nombre de tubes fluorescents	8	52	58	76	
DUREE DE VIE (en heures)	[700,800[[800, 900[[900, 1000[[1000, 1100[[1100, 1200[
Nombre de tubes fluorescents	68	62	48	22	6

1. a) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série statistique. On fera les calculs en supposant que dans chaque classe les éléments sont situés au centre.

Aucun résultat intermédiaire n'est demandé.

b) L'entreprise garantit que les tubes ont une durée de vie supérieure ou égale à 400 heures. Les tubes qui ne répondent pas à ces conditions sont dits défectueux.

Donner le nombre de tubes défectueux dans la série statistique précédente puis le pourcentage d'éléments défectueux de cette série statistique.

2. L'entreprise vend ces tubes par lots de 20. On considère désormais que la probabilité qu'un tube soit défectueux 0,02. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lot de 20 tubes prélevés au hasard (avec remise), associe le nombre de défectueux.

On suppose que X suit une loi binomiale.

a) Quelle est la probabilité, que dans un lot, il n'y ait aucun tube défectueux (on donnera le résultat à 10^{-4} près).

b) Quelle est la probabilité, que dans un lot il y ait au plus deux tubes défectueux (on donnera le résultat à 10^{-4} près).

Exercice 4.:

Un atelier est constitué de 30 postes de travail identiques.

On appelle X la variable aléatoire qui, un jour tiré au hasard, associe aux 30 postes, le nombre de postes de travail dans lesquels une machine et une seule est en panne.

Les 30 postes fonctionnent de manière indépendante.

On admet que la probabilité qu'une machine et une seule soit en panne est 0,124.

- Déterminer, en la justifiant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Calculer la probabilité que, parmi 30 postes, il y en ait 4 exactement qui comportent une machine et une seule en panne.
- Calculer la probabilité que, parmi 30 postes, il y en ait au moins 2 qui comportent une machine et une seule en panne.
- On approche la loi de X par une loi de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi de Poisson.
- Refaire les calculs des questions 2. et 3. à l'aide de la loi de Poisson.