Devoir Maison de Maths n°8

Exercice 1 (Groupement D - 2001) :

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On se propose d'étudier l'évolution en fonction du temps des températures d'un bain et d'un solide plongé dans ce bain. Ces températures (à l'instant t) sont respectivement notées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Le temps *t* est exprimé en seconde et les températures en °C.

Partie A

Les températures $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (1)\ \alpha'(t) = -0{,}011(\alpha(t) - \beta(t)) \\ (2)\ \beta'(t) = 0{,}021\ (\alpha(t) - \beta(t)) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha(0) = 40 \\ \beta(0) = 10 \end{cases}$$

1. On pose $f(t) = \alpha(t) - \beta(t)$
   a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle $y' + 0{,}032y = 0.$
   b) Résoudre l'équation précédente.
   c) Calculer $f(0)$ et montrer que $f(t) = 30 \,.\, e^{-0{,}032t}$

2. Soit F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.
   a) Exprimer $F(t)$ en fonction de $t.$
   b) A l'aide de la condition (2) justifier que $\beta(t) = K + 0{,}021 \,.\, F(t)$ où K est une constante.
   c) Déterminer K et donner une expression de $\beta(t)$ en fonction de $t.$

Partie B

Pour tout t dans $[0 ; +\infty[$ on pose:

$$\begin{cases} \alpha(t) = 5/16 \,.\, (95 + 33 \,.\, e^{-4t/125}) \\ \beta(t) = 5/16 \,.\, (95 - 63 \,.\, e^{-4t/125}) \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de α ainsi que celle de β en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes représentatives de ces fonctions ?

2. Calculer la dérivée et donner les variations de chacune des fonctions α et $\beta.$

3. Construire les courbes représentatives des fonctions α et β dans un repère orthogonal (sur papier millimétré ; unités graphiques : 1 cm pour 5 secondes en abscisse et 2 cm pour 5°C en ordonnée ; on fera varier t entre 0 et 120 secondes).

4. A partir de quel instant la différence de température entre le solide et le bain est-elle inférieure à 1°C?

Exercice 2 (Biotechnologie -1992) :

Partie I : Étude expérimentale
Un appareil mesure, toutes les trente secondes, le rapport $x = C / C_M$, pourcentage de saturation en dioxygène. Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

temps t_i (en secondes)	0	30	60	90	120	150	180	210
$x = C_i / C_M$	0,180	0,392	0,569	0,690	0,784	0,838	0,879	0,908

1. On pose $y = \ln(1 - x)$

a) Calculer les valeurs de y_i arrondies au dix millième le plus proche. Présenter les résultats sous forme de tableau.

b) Représenter le nuage de points de coordonnées (t_i, y_i) dans le plan rapporté à un repère orthogonal, où :
1 cm en abscisse représente 10 secondes,
1 cm en ordonnée représente 0,2 unités.

2. Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement linéaire de y en t.

3. Exprimer x en fonction de t.

Partie II : Étude théorique
On admet que la concentration C en dioxygène vérifie :

$$dC/dt = KC_M \, . \, (1 - C/C_M)$$

où K, coefficient de transfert volumétrique, dépend du milieu (K est une constante qui s'exprime en s^{-1}).

Soit $$x(t) = C(t) / C_M$$

1. Écrire l'équation différentielle *(E)* que vérifie la fonction x.

2. Donner la solution générale de cette équation différentielle *(E)* lorsque $x(t)$ appartient à l'intervalle [0,1[et $t \geq 0$.

3. a) Déterminer, en fonction de K, la solution vérifiant : $x(0) = 0,18$.
b) Calculer K sachant que $x(120) = 0,784$.
c) Exprimer alors x en fonction de t.

Partie III : Étude de la fonction x
Soit la fonction x définie, pour $t \in [0 ; +\infty[$, par : $x(t) = 1 - 0,82 \, . \, e^{-0,011t}$.

1. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Etudier les variations de x.
3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal avec les unités graphiques suivantes : 1 cm pour 10 secondes en abscisses et 10 cm pour une unité en ordonnée.
Construire la représentation graphique de la fonction x ; préciser notamment son asymptote, et sa tangente au point d'abscisse zéro.

Exercice 3 (Groupement D - 2000)

Étude du résultat de la pesée d'un objet de masse m (exprimée en grammes).

On admet que la variable aléatoire X qui prend comme valeurs les résultats de la pesée d'un même objet donné suit la loi normale de moyenne $\mu = 72{,}40$ et d'écart type $\sigma = 0{,}08$.

1. Calculer la probabilité des événements suivants (les résultats seront arrondis au millième le plus proche).

   a) « $X > 72{,}45$ »

   b) « $X \leq 72{,}25$ »

   c) « $72{,}30 \leq X \leq 72{,}50$ »

2. Déterminer le réel strictement positif h (arrondi au centième) tel que la probabilité pour que X prenne une valeur dans l'intervalle $[\mu - h; \mu + h]$ soit égale à 0,989.