Devoir Maison de Maths n°7

Exercice 1: (Biochimiste 1989)

Dans une réaction en catalyse enzymatique, on note *y* la concentration exprimée en moles par litre d'un produit issu d'un substrat.
Cette concentration varie en fonction du temps *t,* exprimé en secondes, en vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$(d^2y/dt^2) + \alpha.\ (dy/dt) = \beta \qquad (1)$$

où α et β sont deux constantes réelles avec α > 0.

Première partie

1. On considère la fonction *v* définie par : $v(t) = dy/dt$
Montrer, en utilisant l'équation différentielle précédente, que cette fonction *v* est solution d'une équation différentielle du premier ordre.
Déterminer la solution générale de cette équation différentielle du premier ordre.

2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1) en utilisant le résultat de la question précédente.

3. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la concentration initiale est nulle.
Démontrer que la concentration *y* est une fonction définie sur [0, +∞[par : $y(t) = (b/a).t + b - e^{-\alpha t}$ où *b* est un réel.

4. Montrer que la courbe représentative de la fonction *y,* définie ci-dessus, dans le plan rapporté à un repère, admet une asymptote lorsque *t* tend vers +∞.

Deuxième partie

On se propose de déterminer expérimentalement le coefficient *b.* Pour $t > 0{,}25$, on confond expérimentalement la courbe et son asymptote. Au cours de la réaction, on a relevé les résultats suivants :

t_i	0,25	0,40	0,50	0,54	0,60
y_i	$1{,}01 \times 10^{-5}$	$1{,}91 \times 10^{-5}$	$2{,}41 \times 10^{-5}$	$2{,}85 \times 10^{-5}$	$3{,}11 \times 10^{-5}$

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (ti; yi). Que peut-on conclure?

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de *y* en *t,* par la méthode des moindres carrés.
En déduire b/a puis *b.*

Exercice 2: (Biotechnologie 1991)
Le but de cet exercice est l'étude d'une réaction de saponification d'un ester, l'acétate de méthyle, par la soude.

On considère la réaction de saponification de l'acétate de méthyle :

acétate de méthyle + soude => acétate de sodium + méthanol

dans laquelle une mole d'acétate de méthyle et une mole de soude se transforment, de manière irréversible, en une mole d'acétate de sodium et une mole de méthanol.

A l'instant $t = 0$, on mélange une solution d'acétate de méthyle et une solution de soude de même concentration initiale : 0,01 mole par litre.

On appelle $x(t)$ la valeur commune, exprimée en moles par litre, des concentrations molaires d'acétate de sodium et de méthanol à l'instant t, exprimé en minutes.

Les parties I et II sont indépendantes

Première partie

On admet que la fonction x vérifie, pour $t \in [0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad dx/dt = k(0,01 - x)^2$$

où k est un nombre réel strictement positif, et la condition initiale $x(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) en tenant compte de la condition initiale.

2. Sachant qu'au bout de 40 minutes 50% de l'acétate de méthyle s'est transformé, calculer le réel k.

3. On suppose que la concentration x s'exprime sur $[0, +\infty[$ par $x(t) = 0,025t / (2,5t + 100)$
   a) Déterminer la limite de x quand t tend vers $+\infty$.
   b) Étudier les variations de la fonction x sur $[0, +\infty[$.

Deuxième partie

On mesure toutes les 30 minutes la concentration de x.
On obtient le tableau suivant :

t_i (en minutes)	30	60	90	120	150	180
x_i (en moles/litre)	$4,1 \times 10^{-3}$	$6,1 \times 10^{-3}$	7×10^{-3}	$7,5 \times 10^{-3}$	8×10^{-3}	$8,2 \times 10^{-3}$

1. On pose: $u_i = 1/ t_i$ et $v_i = 1/x_i$

   a) Calculer les valeurs de u_i arrondies au dix millième le plus proche et les valeurs de v_i arrondies à l'entier le plus proche.
Présenter les résultats sous forme de tableau.

   b) Le plan est rapporté à un repère orthogonal avec les unités graphiques suivantes :
1 cm pour 2×10^{-3} unités sur l'axe des abscisses ;
1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

Construire le nuage de points de coordonnées (ui; vi) sur une feuille de papier millimétré.

2. a) Utiliser les valeurs calculées au II – 1. a) pour déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de *v* en *u* par la méthode des moindres carrés.

.

b) Construire cette droite dans le repère précédent.

3. Déduire de II – 2. a) l'expression *x(t),* et l'écrire sous la forme :

$$x(t) = \alpha t / \beta t + 100$$

On donnera la valeur de a arrondie au millième le plus proche et celle de (3 arrondie au centième le plus proche.