

Devoir Maison de Maths n°6

Exercice 1:

1. On considère l'équation différentielle (E) : $xy' + (x - 1).y = x$, où x appartient à l'intervalle $]0; +\infty [$.

a) Vérifier que la fonction φ définie sur $]0; +\infty [$ par $\varphi(x) = x$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E) dans $]0; +\infty [$. (On commencera par résoudre l'équation sans second membre associée).

c) Déterminer la solution particulière g de (E) définie sur $]0; +\infty [$ telle que : $g(1) = 1 + 1/e$

2. Dans cette question, on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + xe^{-x}$

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Démontrer que la fonction f' admet un minimum positif et en déduire le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .

b) Dresser le tableau des variations de la fonction f . (On rappelle $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / x = +\infty$)

c) Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; i ; j)$ (unité graphique 2 cm).

Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à C et étudier la position de C par rapport à D quand $x \rightarrow +\infty$

Tracer la tangente en O à la courbe C , puis la droite D et la courbe C .

d) Soit G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = (ax + b)e^{-x}$

Déterminer les réels a et b tels que $G'(x) = xe^{-x}$

Calculer alors, en cm^2 , l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe C , la droite D et la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 2:

Une usine produit des billes d'acier en grande quantité.

Dans cette partie, on suppose que 5% des billes produites sont défectueuses. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de n billes choisies au hasard dans la production, associe le nombre de billes défectueuses qu'il contient. La production est suffisamment grande pour qu'on assimile le choix de ce lot à un tirage de n billes avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire Y .

2. a) Exprimer en fonction de n la probabilité qu'un lot de n billes :

- contienne exactement une bille défectueuse.
- contienne au plus une bille défectueuse.

b) Déterminer la taille n du lot telle que la probabilité que ce lot ne contienne pas de pièce défectueuse soit inférieure à 0,05.

Exercice 3:

Dans cet exercice on donnera les valeurs approchées de tous les résultats à 10^{-2} près.

Un distributeur automatique élabore du jus d'orange en mélangeant de l'eau et du concentré d'orange.

A - Vous êtes chargé d'approvisionner chaque matin l'appareil en concentré.

Le plein de concentré étant réalisé chaque matin, on suppose maintenant que la probabilité qu'un jour pris au hasard la machine soit hors service par manque de concentré est $p = 0,05$. Les pannes sont supposées indépendantes les unes des autres.

1. Montrer que la variable aléatoire Y qui, à toute période de 30 jours associe le nombre de jours où le distributeur est hors service par manque de concentré, suit une loi binomiale.

Quels sont ses paramètres ?

2. On approche cette loi par une loi de Poisson. Quel est son paramètre ?

Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus deux mises hors service du distributeur, en une période de 30 jours, par manque de concentré.

B - Vous êtes également chargé de la maintenance du distributeur.

1. Une enquête a montré que la variable aléatoire Z qui, à toute période de 30 jours associe le nombre de pannes mécaniques du distributeur, suit la loi de Poisson telle que

$$P(Z = 1) = 6 \times P(Z = 3)$$

Démontrer que le paramètre de cette loi de Poisson est $\lambda = 1$.

2. a) On suppose que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Déterminer la probabilité de l'événement : « $Y = 1$ et $Z = 1$ ».

b) Déterminer la probabilité de l'événement « le distributeur est hors service deux fois exactement en une période de 30 jours », le hors service se produisant par manque de concentré ou par défaillance mécanique du distributeur et ce de façon indépendante.

Pour simplifier, on considérera que si le distributeur est victime le même jour d'une panne mécanique et d'une panne de concentré, il s'agit quand même de pannes distinctes.