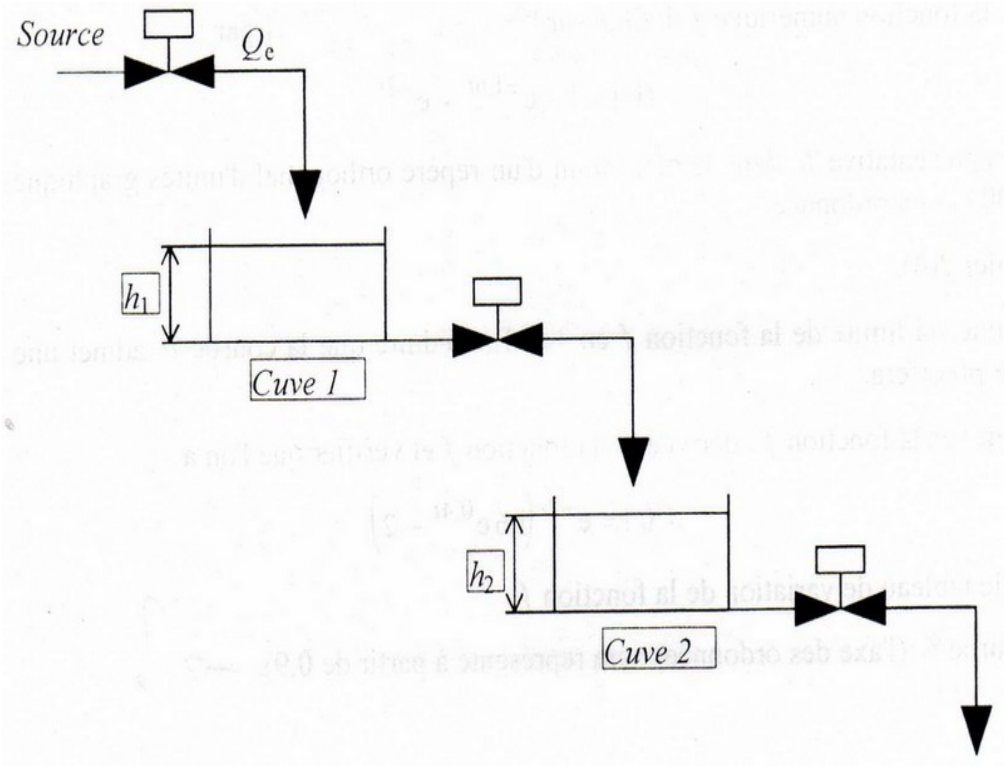
Devoir Maison de Maths n°5

Exercice 1
Cet exercice a pour but d'étudier un dispositif de traitement d'eau provenant d'une source naturelle.



Cuve 1: filtre à sable de section S = 100 m^2
Cuve 2: bâche de stockage pour désinfection de même section S
Q *e:* débit d'entrée ; ce débit est supposé constant et égal à 200 m^3 par heure (m^3.h^{-1}).
h_1 *:* hauteur d'eau, exprimée en mètre, dans la cuve 1.
h_2 : hauteur d'eau, exprimée en mètre, dans la cuve 2.

Partie A : Étude de la hauteur d'eau dans chaque cuve.

Dans chaque cuve, les niveaux variant peu, on peut considérer, en linéarisant le problème, que les hauteurs h_1 et h_2 vérifient les équations différentielles :

$$Q_e\,dt - K_1 h_1 dt = S dh_1 \quad (1)$$

$$K_1\, h_1\, dt - K_2\, h_2\, dt = S dh_2 \quad (2)$$

où t désigne le temps, exprimé en heures, et K_1 et K_2 sont deux constantes réelles positives. Dans le cadre de ce problème, on a K_1 =160 et K_2 = 200 .

1. a) Avec les données numériques indiquées, vérifier que l'équation différentielle (1) peut s'écrire :

$$h'_1 + 1{,}6 h_1 = 2 \quad (1')$$

b)Résoudre l'équation différentielle (1').
c) A l'instant t = 0, on a h_1 (0) = 1 ; déterminer l'expression de h_1 en fonction de t.

2. a) Vérifier que l'équation différentielle (2) peut s'écrire:

$$h'_2+2h_2 = 2 - 0,4e^{-1,6t} \quad (2')$$

b)Déterminer les réels a et b tels que la fonction $t \dashrightarrow a + be^{-1,6t}$ soit une solution particulière de l'équation (2').

c) Résoudre l'équation différentielle (2').

d) A l'instant t = 0, on a $h_2(0) = 1$; déterminer l'expression de h_2 en fonction de t.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle I = [0, +∞ [par :

$$f(t) = 1 - e^{-1,6t} + e^{-2t}$$

et sa courbe représentative C_f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 10 cm en abscisse et 100 cm en ordonnée.

1. a) Calculer $f(0)$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en +∞. En déduire que la courbe C_f admet une asymptote que l'on précisera.

2. a) Déterminer la fonction f', dérivée de la fonction f et vérifier que l'on a :

$$f'(t) = e^{-2t} \, . \, (1,6e^{0,4t} - 2)$$

b) Établir le tableau de variation de la fonction f.

3. Tracer la courbe C_f (l'axe des ordonnées sera représenté à partir de 0,9).