<u>Devoir Maison de Maths n°2</u>

<u>Exercice 1</u>

Les parties A, B, C de cet exercice sont indépendantes

<u>Partie A</u> : <u>*Résolution d'une équation différentielle (E)*</u>

On considère l'équation différentielle

$$(E) = (x + 1)y' + y = 1/ (x+1)$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle $]-1; +\infty[$, et où y' désigne la fonction dérivée première de y.

1. Démontrer que la fonction g définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par:
   $g(x) = (\ln (x+1)) / (x+1)$ est une solution de l'équation *(E)*

2. Résoudre sur $]-1; +\infty[$ l'équation différentielle :
   $(E') = (x+1)y'+y=0$
3. Déduire des questions 1. et 2. la solution générale de l'équation différentielle *(E)*.
4. Déterminer la solution particulière de *(E)*, prenant la valeur 2 pour $x = 0$.

<u>Partie B :</u> <u>*Étude d'une solution de l'équation différentielle (E)*</u>

On se propose d'étudier la fonction f, définie sur $]-1; +\infty[$, par :

$$f(x)= (2+\ln(x+1))/(x+1)$$

On désigne par *(C)* la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

1. On considère d'abord la fonction *u* définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$u(x) = 1 + \ln(x+1)$$

   a) Montrer que *u* est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$
   b) Vérifier que : $u(1/e - 1) =0$ et déterminer le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-1; +\infty[$

2. Étude des variations de la fonction *f*:
   a) Démontrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
   b) Montrer que : $f'(x)= (-u(x))/((x+1)^2)$
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction *f*; donne la valeur exacte de $f(1/e - 1)$
   d) Tracer la représentation graphique de la fonction f

<u>Partie C :</u> <u>*Calcul d'une intégrale*</u>

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_0^1 (2/(x+1))dx$$

2. Soit *H* la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$H(x) = (\ln(x+1))^2$$

Calculer $H'(x)$

3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale : $J = \int_0^1 f(x)dx$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu en justifiant votre réponse.

Exercice 2

Pour entrer sur une section d'autoroute, un automobiliste jette une pièce de 2€ dans panier ; la pièce est alors testée avant d'ouvrir le passage.
Des faussaires ont mis en circulation un grand nombre de fausses pièces de 2€ impossibles à détecter à l'œil.

Une élude statistique montre que :

- 1/20 des pièces de 2€ jetées dans le panier sont fausses ;
- le passage est ouvert 98 fois sur cent lorsque la pièce est vraie et 4 fois sur cent lorsque la pièce est fausse.

1. Calculer la probabilité que le passage s'ouvre lorsque l'automobiliste jette une pièce de 2€ dans le panier.
2. Le passage s'est ouvert; quelle est la probabilité que l'automobiliste ait jeté une pièce de 2€ vraie?
3. Le passage ne s'est pas ouvert; quelle est la probabilité que l'automobiliste ait jeté une pièce de 2€ fausse?