Devoir Maison de Maths n°13

Exercice 1: (BTS Chimiste 2001) - 10 points

Une entreprise fabrique des flacons destinés à contenir une substance particulière. Un flacon est dit conforme s'il vérifie un ensemble de critères définis par l'entreprise. On appelle p la proportion de flacons conformes dans l'ensemble de la production.

Première partie

Un processus de contrôle de la conformité des flacons a été mis au point par l'entreprise. On s'intéresse dans cette partie aux risques d'erreurs de ce contrôle et on suppose que la proportion p de flacons conformes est égale à 0.8.
On prélève un flacon au hasard dans l'ensemble de la production.
On note :

C l'événement : « le flacon prélevé est conforme » ; on a donc P(C) = 0,8.

A l'événement : « le flacon prélevé est accepté par le contrôle ».

Une étude préliminaire a permis d'estimer les risques d'erreurs de ce contrôle :

- la probabilité de refuser un flacon sachant qu'il est conforme est de 0,05; on a donc $P_C(\bar{A}) = 0,05$.
- la probabilité d'accepter un flacon sachant qu'il n'est pas conforme est de 0,1; on a donc $P_{\text{Cbarré}}(A) = 0,1$.

1. a) Déterminer la probabilité qu'un flacon soit accepté sachant qu'il est conforme.
b) Déterminer la probabilité qu'un flacon soit accepté par le contrôle.
c) Déterminer la probabilité qu'un flacon ne soit pas conforme sachant qu'il a été accepté par le contrôle. (Arrondir le résultat au centième).

2. On admet que la probabilité de choisir un flacon non conforme parmi ceux qui ont été acceptés par le contrôle est égale à 0,03.
On prélève au hasard et avec remise des échantillons de 100 flacons dans l'ensemble des flacons qui ont été acceptés par le contrôle.
On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe le nombre de flacons non conformes de cet échantillon.
a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi de Poisson ?
Calculer, à l'aide de cette loi de Poisson, une valeur approchée de la probabilité de l'événement $(X > 5)$.

Seconde partie

On se propose de construire et d'utiliser un test unilatéral pour valider ou refuser, au seuil de risque 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion p de flacons conformes dans l'ensemble de la production, sur une période donnée, est égale à 0,8.
(Hypothèse nulle H_0 : «$p = 0,8$ » ; hypothèse alternative H_1 : «$p < 0,8$ »).
Pour cela, on prélève au cours de cette période dans l'ensemble de la production des échantillons de 200 flacons, au hasard et avec remise.
On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de ce type, associe la proportion de flacons conformes de cet échantillon. On admet que la loi de F est une loi normale $\mathcal{N}(p, \sigma)$.

1. Sous l'hypothèse H_0 :
a) Montrer qu'une valeur approchée de σ est 0,03.
b) Déterminer le réel positif h tel que $P(F > 0,8 - h) = 0,95$. (Arrondir le résultat au centième).

2. Énoncer la règle de décision relative à ce test de validité d'hypothèse.

3. Dans un échantillon de 200 flacons, on a trouvé 156 flacons conformes.
Au vu de cet échantillon, doit-on, au de risque 5 % accepter ou refuser l'hypothèse « $p = 0,8$ » ?

Exercice 2: (Groupement D - 2001) - 5 points

Un personne prétend qu'elle peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal.
On appelle p la probabilité que cette personne donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.
Si cette personne ment on a $p = ½$, sinon $p > ½$.
On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.
On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence des succès obtenus par le prétendant devin au cours des n tirages d'une carte. On admet que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{(p(1-p)) / n}$.
On construit un test unilatéral permettant de détecter, au risque de 5%, si cette personne ment. On choisit $n = 100$.
On choisit comme hypothèse nulle $H_0 : p = ½$, et comme hypothèse alternative $H_1 : p > ½$.

1. Calculer, sous l'hypothèse H_0, le réel positif h tel que $P (F \geq ½ + h) = 0,95$

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. Sur un échantillon de taille 100, le prétendant devin a obtenu 64 succès. Peut-on considérer, au risque de 5%, que le prétendant devin est un imposteur ?

Exercice 3: (Groupement D - 2002) - 5 points

Un atelier produit en grande série des disques de diamètre nominal 25 mm.
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque disque de la production, associe son diamètre en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ. Un disque est considéré comme valable si son diamètre est compris entre 24,90 mm et 25,08 mm, sinon il est considéré comme défectueux.

1. On suppose que $\sigma = 0,04$. Calculer la probabilité qu'un disque pris au hasard dans la production soit défectueux, dans chacun des deux cas suivants :
   a) $m = 25$
   b) $m = 24,99$

2. On note *Xbarré* la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 disques de la production, associe la moyenne des diamètres de ces 100 disques. On admet que X suit la loi normale de moyenne m et d'écart type 0,004.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 disques dans la production. On souhaite construire un test bilatéral de validité d'hypothèse, pour savoir si l'on peut considérer, au risque de 5%, que la moyenne m des diamètres des disques de la production est égale à 25.
   a) Sous l'hypothèse nulle H_0 ($m = 25$), calculer la valeur du réel d tel que :
$P (|Xbarré – 25| < d) = 0,95$
   b) La moyenne des diamètres des 100 disques de l'échantillon prélevé dans la production est 24,994. Quelle est la conclusion du test ?