Devoir Maison de Maths n°11

Exercice 1:
On s'intéresse au fonctionnement d'une machine produisant des billes une semaine donnée. La production d'une bille est considérée comme une épreuve aléatoire. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque bille produite, associe son diamètre exprimé en centimètres. On admet que la semaine considérée X suit la loi normale de moyenne $\mu = 3,32$ cm et d'écart type $\sigma = 0,1$ cm . On prélève, au hasard, au cours de la même semaine des échantillons aléatoires de n billes (n entier nature non nul).
On assimile ces échantillons à des échantillons prélevés avec remise.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs la moyenne des diamètres des différentes billes constituant chacun de ces échantillons.

1. Quelle est la loi suivie par X ?

2. Quelle valeur minimale faut-il donner à n pour que X soit dans l'intervalle [3,29 ; 3,35] avec une probabilité au moins égale à 0,99.

Exercice 2:
Les résultats numériques seront arrondis au centième le plus proche (sauf question 3).

Sur chaque type de terrain, tous les melons produits à la même époque ont la même probabilité d'avoir un taux de sucre suffisant.
Victor a un terrain mal exposé : au mois de juillet, chacun de ses melons a la même probabilité $p_b = 0,6$ d'avoir un taux de sucre suffisant.
On note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de n melons (assimilé à un échantillon non exhaustif), associe le nombre de melons de l'échantillon qui ont un taux de sucre suffisant. On note $F = Y / n$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon du type précédent, associe la proportion de melons dont le taux de sucre est suffisant dans l'échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?

2. Exprimer l'écart type $\sigma(Y)$ en fonction de n et de p_b. En déduire que la variable aléatoire F admet pour écart type $\sigma(F) = \sqrt{(p_b (1 - p_b)) / n}$.

3. Quelle doit être la taille minimale de l'échantillon pour que la variable aléatoire F appartienne à l'intervalle [0,55 ; 0,65] avec une probabilité de 0,95.

Exercice 3:
1. Déterminer toutes les fonctions y de la variable x, définies sur]0 ;+∞[qui vérifient l'équation différentielle : $xy' - 2y = 0$ où y' désigne la dérivée première de y.

Soit l'équation différentielle $(E) : xy' - 2y = \ln x$, définie sur]0 ;+∞[.
On pose $g(x) = x^2 . h(x)$. Déterminer la fonction h telle que g soit solution de l'équation différentielle (E).
Déduire de ce qui précède la solution Y de l'équation différentielle (E), définie sur]0 ;+∞[, telle que $Y(1) = 0$.

2. Soit f la fonction numérique définie sur]0 ;+∞[par : $f(x) = \frac{1}{2} . (((x^2 - 1)/2) - \ln x)$.
Étudier les variations de f quand x décrit]0 ;+∞[.

3. Dans le plan rapporté au repère orthonormal (O, i, j) l'unité étant 2 cm, tracer très soigneusement la représentation graphique Γ de la fonction f.