Devoir Maison de Maths n°10

Exercice 1:

A - Équation différentielle.
On considère l'équation différentielle *(E)* suivante, où y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ et où ln désigne la fonction logarithme népérien:

$$(E) \qquad xy' - y = \ln x$$

1. Résoudre, sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ l'équation différentielle : $xy' - y = 0$.

2. Vérifier que la fonction h, définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $h(x) = -\ln x - 1$, est une solution particulière de *(E)*.
   En déduire l'ensemble des solutions de *(E)*.

3. Déterminer la solution f de *(E)* qui vérifie $f(1) = 1$.

B - Étude d'une fonction.
Soit la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \ln x$.

1. Déterminer la limite de f en 0 et montrer que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

2. Calculer la fonction dérivée f' de f.
En déduire les variations de f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

C - Représentation graphique ; calcul d'aire.
On note C la courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère orthonormal (O; i; j) du plan.

1. Étudier la position de C par rapport à la droite D d'équation : $y = 2x - 1$.

2. Tracer la partie de la courbe C pour $0 < x \leq 3$ ainsi que la droite D. (Unité graphique : 4 cm).

3) a) Vérifier que la fonction $H : x \rightarrow x \ln x - x$ est une primitive sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ de la fonction $x \rightarrow \ln x$.
   b) Représenter sur le graphique le domaine délimité par la courbe C, la droite D et les droites Δ et Δ' d'équations respectives : $x = 1/2$ et $x = 1$.
   c) Calculer, en cm^2, l'aire de ce domaine. (On en donnera une valeur décimale approchée par excès à 10^{-2} près).

Exercice 2:

Une usine fabrique des tubes cylindriques en verre ; la variable aléatoire *D* qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production, associe son diamètre suit la loi normale de moyenne $\mu = 15$ *mm* et d'écart-type $\sigma = 0,35$ *mm.*

1. Le contrôle de la fabrication ne retient que les pièces dont le diamètre est compris entre 14,3 mm et 15,5 mm. On considère une production comprenant un très grand nombre de pièces. Quelle est dans cette production le pourcentage de pièces valables ?

2. Déterminer *x* pour que le diamètre de 95% de la production appartienne à l'intervalle: $[\mu - x ; \mu + x]$.

3. Un autre réglage de la machine fait apparaître la moyenne 14,9 mm. Quel devrait être l'écart type pour que 90% des pièces soient conformes au contrôle tel qu'il est défini dans la question 1°.