Devoir Maison de Maths n°1

Exercice 1

Au cours d'une réaction chimique la concentration x d'un produit évolue en fonction du temps; les résultats expérimentaux sont les suivants:

t en minutes	100	270	480	600	705	800
x(t) en mol/l	0,01	0,02	0,06	0,12	0,17	0,24

1. On pose : $y = \ln((x) / (0{,}377 - x))$; déterminer les valeurs de y arrondies au millième le plus proche.
2. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées : (t,y).
3. Calculer le coefficient de corrélation. L'ajustement linéaire est-il légitime?
4. Déterminer, si cela est possible une équation de la droite d'ajustement du nuage par la méthode des moindres carrés.
5. En déduire une expression de $x(t)$ en fonction de t.
6. En déduire une estimation de la concentration au bout de 16 heures.

Exercice 2

On dispose de pièces provenant de deux séries de fabrication (A et B): pour chacune des séries, une étude statistique a permis de déterminer la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse.
On a constaté que:
- La série A comporte 3 fois moins de pièces que la série B.
- Dans la série A : probabilité pour qu'une pièce de cette série soit défectueuse : 0,0025.
- Dans la série B : probabilité pour qu'une pièce de cette séné soit défectueuse : 0,00375.

1. On choisit au hasard une pièce dans l'ensemble des pièces fabriquées (séries A et B réunies) : quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?
2. On choisit au hasard une pièce dans l'ensemble des pièces fabriquées (séries A et B réunies) : elle est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de la série A?

Exercice 3

Soient les fonctions f et g définies sur R par :

$$f(x) = (x + 3) / (e^x) \text{ et } g(x) = (2x + 5)/(e^x)$$

1. Étudier les variations de ces deux fonctions sur [-3 ; 1].
2. Tracer leurs représentations graphiques Cf et Cg sur la même feuille dans un repère orthogonal (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses, 1,5 cm sur l'axe des ordonnées).
3. Déterminer les réels α et β tels que la fonction F définie sur R par:
   $F(x) = (\alpha.x + \beta)e^{-x}$ soit une primitive sur R de la fonction : $x \rightarrow (x + 2)\, e^{-x}$.
4. *4.* Déterminer en cm^2 l'aire comprise entre:
   les courbes Cf et Cg
   les droites d'équation:y=-3 et x=1.

Exercice 4

On décide de mesurer en fonction du temps, la quantité de *principe actif* d'un médicament présent dans le sang d'un groupe de patients en traitement dans un hôpital. A l'instant t, exprimé en minutes, on note la quantité exprimée en milligrammes de ce principe actif, contenue dans le sang d'un patient.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A: *Résolution d'une équation différentielle*

On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle (*E) :*

$$4y'+y=-0,002t+2,992$$

où y est une fonction de la variable réelle r définie et dérivable sur [0 ; 1440] et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) = 4y'+ y = 0$
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur [0 ; 1440] par $g(t)= -at + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle *(E).*
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle *(E).*
4. Déterminer la solution q de l'équation différentielle *(E)* qui vérifie la condition initiale $q(0)=0$.

Partie B: *Étude d'une fonction et calcul intégral*

On admet dans cette partie que pour tout t de [0; 1440], $q(t) = 3-0,002t-3e^{(-t/4)}$

On rappelle que le temps t est exprimé en minutes.

1. a) Calculer $q'(t)$ pour tout t de [0 ; 1440]
   b) Résoudre dans [0; 1440] l'inéquation $q'(t)\geq 0$
   c) En déduire le sens de variation de q sur [0 ; 1440]

La fonction q admet un maximum pour $t=t_0$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de t_0 et $q(t_0)$.

2. Calculer la quantité de principe actif restant dans le sang d'un patient 24 heures après l'injection du médicament. On arrondira le résultat à 10^{-2} près. Démontrer que la valeur moyenne V_m de la fonction q sur [0 ; 1440] est y:

$$V_m = 1/1440 \ (\ 2234,4 + 12e^{-360})$$