Devoir Maison de Maths n°9

Exercice 1 :

On étudie la croissance d'une population de crustacés planctoniques, à l'instant *t* exprimé en jours, dans un environnement limité. L'effectif de la population a alors une limite finie *K.*

t_i (en jours)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
x_i (effectifs)	15	59	199	448	631	697	715	720	720

La population se stabilise au bout de 14$^{\text{ème}}$ jour et donc, dans cette expérience, K = 720.
On pose $y = \ln (x / (720 – x))$.

1. Établir le tableau des valeurs (t_i ; y_i) pour $t_i \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$: les valeurs des y_i seront arrondies à 3 décimales.
2. Construire le nuage de points de coordonnées (t_i ; y_i) et placer le point moyen.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de ce nuage; que peut-on en conclure?
4. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de *y* par rapport à *t.* Tracer cette droite dans le graphique précédent.
5. En déduire *x* en fonction de *t.*

Exercice 2:

On considère la réaction de saponification de l'acétate de méthyle :

acétate de méthyle + soude → acétate de sodium + méthanol

dans laquelle une mole d'acétate de méthyle et une mole de soude se transforment, de manière irréversible en une mole d'acétate de sodium et une mole de méthanol.
A l'instant *t* = 0, on mélange une solution d'acétate de méthyle et une solution de soude de même concentration initiale 0,01 mole par litre.
On appelle *x(t)* la valeur commune, exprimée en moles par litre, des concentrations molaires de d'acétate sodium et de méthanol à l'instant t, exprimé en minutes. On mesure toutes les 30 minutes la concentration *x.* On obtient le tableau suivant :

t_i (en minutes)	30	60	90	120	150	180
$10^3\, x_i$ (en moles par litre)	4,1	6,1	7,0	7,5	8,0	8,2

1. Représenter le nuage des points de coordonnées : (t_i ; x_i).
2. On pose $u_i = 1/t_i$ et $v_i = 1/x_i$; calculer les valeurs de u_i, arrondies à 10^{-4} près et celles de v_i arrondies à l'unité.
3. Représenter sur un autre graphique le nuage des points de coordonnées (u_i, v_i); calculer son coefficient de corrélation linéaire. Que peut-on en conclure?
4. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de *v* en *u.* Tracer cette droite dans le graphique de la question 3.
5. En déduire l'expression de *x* en fonction de *t* et l'écrire sous la forme : $x(t) = at / (bt + 100)$.
6. Étudier les variations de la fonction *x* sur l'intervalle [0; +∞ [.
7. Construire sa représentation graphique sur le même graphique que celui de la question 1.

Exercice 3:

On considère la fonction *f* définie sur R par $f(x) = -5e^{2x} + 6e^{x} - 1$.

1. Construire la représentation graphique *C* de la fonction *f* dans un repère orthonormé.
2. Au vu de cette représentation graphique:
   • que pouvez-vous conclure sur les limites de $f(x)$ en l'infini ?
   • que pouvez-vous dire du signe de $f(x)$ sur R ?
3. Étudier les variations de la fonction *f* sur R.
4. Résoudre dans R l'équation $f(x) = 0$, puis l'inéquation $f(x) < 0$.
5. Résoudre dans R l'inéquation $f(x) + 1 > 0$. Que peut-on en conclure pour la représentation graphique de la fonction *f* ? Compléter votre représentation graphique.
6. Déterminer **la plus grande valeur du réel positif** *a* telle que la courbe *C* admettent une tangente parallèle à la droite d'équation $y = ax$. Placer le point correspondant et sa tangente sur le graphique.