Devoir Maison de Maths n°8

Exercice 1:

Partie 1

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = e^x (x + 3) - 5e^2$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur R.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans R; calculer $g(2)$; que pouvez-vous en déduire?
3. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur R .

Partie 2

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x(e^x – 5e^2) + 2e^x$

1. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que la droite D d'équation : $y = -5e^2x$ est une asymptote oblique à la représentation graphique C de la fonction f; étudier en fonction de x les positions relatives de D et C.
3. Sur quel intervalle la fonction f est-elle dérivable? Que pouvez-vous en conclure?
4. Déterminer $f'(x)$ et donner son signe sur R.
5. Donner le tableau de variation de la fonction f.
6. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
7. L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle des solutions dans R? Si oui déterminer, en justifiant vos calculs, un intervalle de largeur 1 contenant chacune des solutions.
8. Si l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions dans R, déterminer pour chacune d'elle un encadrement de largeur 10^{-2}.

(adapté d'annales de Bac STL 2002)

Exercice 2:

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c$ où a, b et c sont des réels fixés.

On appelle C la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O,i, j) du plan d'unité graphique 2 cm.

1. On sait que les points A (1;-1/2), B (e^2, 3/2) et C (e^3, 11/2) appartiennent à la courbe C ; en déduire les valeurs des réels a, b et c.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer $f'(1)$; la courbe C admet-elle des tangentes parallèles à la droite D d'équation $y = -x$? Si oui, en quel(s) point(s)?
4. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation $f(x) = 23/2$.
5. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation /(x) = 0 .
6. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 3:

Soit C la courbe d'équation $y = x^2 -1 + \ln x$.

1. A quelle condition le point M (x ; y) peut-il appartenir à la courbe C ?
2. Existe-t-il des points de la courbe C qui admettent une tangente parallèle à la droite D d'équation $y = 3x - 1$? Si oui, lesquels?
3. La courbe C est-elle sécante avec l'axe des abscisses? Si oui en combien de points et lesquels ?