Devoir Maison de Maths n°7

Exercice 1:

Partie 1

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ telle que : $g(t) = (at^2 + bt + c) / t^2$ (a, b et c étant trois nombres réels) ; on sait que :

$$\begin{cases} g(1) = 0 \\ g(3) = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs des nombres a, b et c.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire le signe de $g(t)$ sur $]0, +\infty[$ (on justifiera soigneusement les résultats).

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = - 3/4 – 4 \ln x + x$.

1. En mettant x en facteur dans l'expression de $f(x)$ déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. En mettant 1/x en facteur dans l'expression de $f(x)$ déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures (on rappelle que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x \ln x) = 0$) ; quelle conséquence peut-on en tirer ?
3. Déterminer $f(x)$; en utilisant la partie 1 en déduire les variations de la fonction f.

Partie 3

1.Démontrer que l'équation $f(x) = 0$:

- n'admet aucune solution dans l'intervalle $]0; 3[$;
- admet une unique solution que l'on notera x_0 dans l'intervalle $[3;10]$;
- n'admet aucune solution dans l'intervalle $]10; +\infty[$.

2. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

Exercice 2 :

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 720/ (1 + e^{-0,73t + 3,88})$

1. Compléter après avoir reproduit le tableau suivant (les valeurs de $f(t)$ seront arrondies à l'unité près).

t	0	2	4	6	8	10	12	16	18
$f(t)$									

2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, i, j) ; on prend comme unités graphiques 1 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 sur l'axe des ordonnées. Construire la représentation graphique de la fonction f dans ce repère.

Partie 2

$f(t)$ représente le nombre de crustacés planctoniques dans une culture en laboratoire au bout de t jours.

1. Quelle constatation peut-on faire à la vue du tableau précédent et de l'étude de la fonction
2. Déterminer graphiquement au bout de combien de jours la population dépasse 500 individus.
3. Déterminer ensuite cette valeur par le calcul.

Exercice 3 :

On considéré la fonction f définie sur R par : $f(t) = t - e^{3t-t}$ et sa représentation graphique C dans un repère orthogonal (O,i,j) (unités graphiques : 5 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée).

1. Déterminer les limites de $f(t)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que la courbe C admet une asymptote oblique D dont on déterminera l'équation ; précisez la position de C par rapport à D.
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier son signe sur R.
4. Terminer l'étude des variations de la fonction f sur R.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 1.
6. Tracer les droites D et T, la courbe C dans le repère donné.