

Devoir Maison de Maths n°15

Exercice 1:

La concentration en g/L, de micro-organismes dans une culture en continue varie en fonction du temps t exprimé en heures ($t > 0$) et vérifie : $x(t) = 2,49e^{-0,70t} + 2,24e^{0,35t}$

1. Le plan étant rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées ; tracer la courbe représentative de la fonction x sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
2. Déterminer graphiquement le temps au bout duquel la concentration sera égale au double de la concentration initiale.
3. Calculer les dérivées première et seconde x' et x'' de la fonction x .
4. Démontrer que, pour tout t positif ou nul $x''(t) > 0$.
5. Dans les questions suivantes, les calculs approchés seront effectués au centième près :
 - a) Dresser le tableau de variation de la fonction x' sur $[0;6]$;
 - b) Démontrer que l'équation $x'(t) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;6]$ et que $0,7 < \alpha < 0,8$ (on ne demande pas de calculer α) ;
 - c) En déduire le signe de $x'(t)$ sur $[0; 6]$;
 - d) En déduire le sens de variation de la fonction x sur $[0; 6]$ et donner son tableau de variation.
6. Déterminer graphiquement le temps au bout duquel la concentration de nouveau égale à la concentration initiale.
7. Résoudre dans $[0; 6]$ l'équation $x(t) = x(0)$; conclure.

Exercice 2:

Une observation faite par un journal, sur ses abonnés, a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement voisin de 80 % ainsi que l'apparition d'environ 5 000 nouveaux abonnés. On note a_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $a_0 = 10\,000$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = 0,8a_n + 5\,000$
2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par : $u_n = 25\,000 - a_n$.

En exprimant u_{n+1} en fonction de u_n , montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n . En déduire que :
 $a_n = 25\,000 - 15\,000 \times 0,8^n$
4. En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n) .
5. Au bout de combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 22 000 ?

Exercice 3:

Le conducteur d'une automobile doit avoir un taux d'alcoolémie strictement inférieur à 0,5 gramme par litre.

Un laboratoire a mis au point un éthylotest ; théoriquement, celui-ci devrait être positif lorsqu'une personne testée a un taux d'alcoolémie supérieur ou égal à 0,5 gramme par litre, mais il n'est pas parfait :

- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie supérieur ou égal à 0,5 gramme par litre, il n'est positif que 96 fois sur 100 ;
- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie strictement inférieur à 0,5 gramme par litre, il est positif 3 fois sur 100.

Dans une région donnée, 95% des conducteurs ont, le samedi soir, un taux d'alcoolémie strictement inférieur à 0,5 gramme par litre. On soumet au hasard, un samedi soir, un automobiliste de cette région à l'éthylotest.

1. Quelle est la probabilité que l'éthylotest soit positif ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait un taux d'alcoolémie supérieur à 0,5 gramme par litre bien que l'éthylotest soit négatif?

On choisira les événements suivants :

N : « l'éthylotest est négatif » ;

S : « l'automobiliste a un taux d'alcoolémie supérieur ou égal à 0,5 gramme par litre ».

Exercice 4:

Dans une région d'un pays en voie de développement, 15% de la population est contaminée par un certain virus.

Un laboratoire met en place un test de dépistage qui n'est malheureusement pas fiable à 100%.

- la probabilité pour que le test soit positif sachant que l'individu est sain est 0,004 ;
- la probabilité pour que le test soit négatif sachant que l'individu est contaminé est 0,024.

On tire un individu au hasard dans cette population (tous les individus ont la même probabilité d'être choisis) et on lui fait passer le test de dépistage.

Déterminer la probabilité pour que le résultat du test soit erroné.

On choisira les événements suivants :

S : « l'individu est sain » ;

N : « le test est négatif ».

Exercice 5:

Une entreprise pharmaceutique fabrique en grande quantité un certain type de comprimés. Les réglages de la chaîne de production permettent d'affirmer qu'en bout de chaîne 90% des comprimés sont conformes au cahier des charges et donc sans danger pour les malades. Les comprimés sont contrôlés un par un :

- tous les comprimés conformes sont acceptés ;
- mais, il y a une probabilité de un sur onze pour qu'un comprimé non-conforme soit accepté.

Seuls sont commercialisés les comprimés acceptés après le contrôle.

Un patient absorbe un de ces comprimés qu'il s'est procuré chez son pharmacien ; quelle est la probabilité qu'il se retrouve aux urgences dans les heures qui suivent ?