

Devoir Maison de Maths n°12

Exercice 1:

Pour son anniversaire, Fred a offert à Tonton un album à colorier de dix pages. Tonton n'a réussi à en colorier que cinq: deux en vert et trois en rose (*Tonton ne peut concevoir que des pages monochromes*). L'album est de mauvaise qualité et les pages se sont détachées; les pages blanches sont alors indiscernables, les pages vertes aussi; il en est de même pour les pages roses.

1. Fred veut reconstituer l'album de Tonton en alternant une page blanche et une page coloriée. Combien a-t-il de possibilités ?
2. Une fois l'album reconstitué, Fred offre à Tonton un crayon bleu, un jaune et un rouge. Combien de possibilités Tonton a-t-il pour colorier les cinq pages blanches sachant qu'il les colorie de manière monochrome ?

Exercice 2:

Dans un jeu de tarot, on isole les 21 atouts numérotés de 1 à 21. On prend trois atouts au hasard. Calculer la probabilité d'avoir :

1. au moins un numéro multiple de cinq ;
2. exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ;
3. le 1 ou le 21.

Exercice 3:

Dans un étang, il y a des gardons et des brochets. Alain pêche à la mouche et prend deux fois plus de gardons que de brochets, alors qu'Alex, avec sa canne à lancer, attrape autant de brochets que de gardons. Alex est un pêcheur expérimenté : il pêche trois fois plus de poissons qu'Alain. Les poissons pêchés par Alain et Alex sont conservés dans le même vivier. On y prend un brochet au hasard : calculer la probabilité qu'il ait été pêché par Alex.

(Indication: on introduira quatre variables représentant les poissons pêchés par Alain et Alex)

Exercice 4:

Dans une usine qui produit un certain modèle de pièces, chacune des pièces produites est susceptible de présenter un défaut A, un défaut B ou simultanément les deux défauts A et B. On a constaté sur une longue période d'observation que chaque jour en moyenne :

- La probabilité pour une pièce de présenter le défaut A est de 0,08 ;
- Si une pièce présente le défaut A, la probabilité qu'elle présente le défaut B est de 0,15;
- Si une pièce ne présente pas le défaut A, la probabilité qu'elle présente le défaut B est de 0,05.

Déterminer pour un jour donné la probabilité pour une pièce :

- a) De présenter simultanément le défaut A et le défaut B ;
- b) De présenter le défaut B sans présenter le défaut A ;
- c) De présenter le défaut B et peut-être le défaut A
- d) De ne présenter ni le défaut A, ni le défaut B.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = e^{1-x} + \ln x$.

On appelle C la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, i, j) d'unité graphique 4 cm.

Partie A

1. Étudier les variations sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction g définie par : $g(x) = x \cdot e^{1-x}$.
2. En déduire que pour tout x strictement positif, on a : $g(x) \leq 1$; préciser la valeur pour laquelle on a l'égalité.

Partie B

1. Calculer la dérivée de la fonction f ; démontrer alors que : $f'(x) = (1-g(x)) / x$
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. On appelle Γ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien dans le même repère.

On pose : $d(x) = f(x) - \ln x$

- a) Étudier le signe de $d(x)$ sur $]0 ; +\infty[$; en déduire la position relative des courbes C et Γ .
- b) Étudier la limite de $d(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$; que peut-on en conclure ? Tracer la courbe Γ sans justification et la courbe C .